拡張多選択肢ゲームの解(不確実性を含む意思決定の数理とその応用)

AUTHOR(S):

鶴見, 昌代; 乾口, 雅弘; 谷野, 哲三

数理解析研究所講究録
第 1548 巻 2007 年 9-16

拡張多選択肢ゲームの解

大阪大学大学院基礎工学研究科
鶴見 昌代 (Masayo Tsurumi)
乾口 雅弘 (Masahiro Inuiguchi)
Graduate School of Engineering Science, Osaka Univ.
谷野 哲三 (Tetsuzo Tanino)
Graduate School of Engineering, Osaka Univ.

1. はじめに

提携形ゲームは，ゲームに参加する意思決定主体であるプレイヤーが何らかの提携を形成することによってより多くの利益を得ようとする状況を数学的に表現したもので，その合理的な利得の分配法に関する議論は重要である．提携形ゲームにおいて各プレイヤーの意思決定は，提携に参加するかどうか二者択一なものとして議論されている．

しかしながら，プレイヤーは単に参加するか否かではなく，参加レベルを選択するような状況も数多く存在する．このような状況を前提としているのが協力ファジィゲーム [1, 2, 3, 7, 12, 13, 14, 15] である．協力ファジィゲームでは，Shapley 値 [7, 14, 15]，コア [13]，対角値 (diagonal value)[7] などが提案されている．

他方，選択しうる選択肢が複数存在する状況も数多く存在する．これを取り扱う協力ゲームとして定式化されたのが多選択肢ゲーム（r 代替案ゲーム）である [4, 5]．多選択肢ゲームにおいては，各プレイヤーは必ず一つの選択肢を選択するということが前提とされている．しかしながら，いずれの選択肢をも選択しないような状況が存在することがある．このようなときは，選択しないということを特別視して取り扱う必要がある．この前提に基づいて提案されたのが拡張多選択肢ゲームである [16]．拡張多選択肢ゲームにおいては，Banzhaf 型貢献度期待値 [16] などが提案されている．

さらに，複数の選択肢のもとで，それぞれの選択肢をいくらかの割合ずつ選択できることを取り扱える協力ゲームとして，多選択肢ファジィゲームとして提案された [16]．[16] では，提携参加度を考慮した各選択肢に対する限界貢献度を定義し，プレイヤー間に参加度の選択に関する独立性が成り立つときの解概念として Banzhaf 型貢献度期待値 [16] が提案されている．これは，通常の協力ゲームにおける Banzhaf 値の拡張ともみなされる．また，拡張多選択肢ゲームの多重線形展開が与えられ，多重線形展開で表される多選択肢ファジィゲームのクラスでの性質が明らかにされている．

本論文では，提携参加度を考慮した各選択肢に対する限界貢献度を元に，すべてのプレイヤーが同質であるときの限界貢献度の期待値をファジィ拡張多選択肢ゲームにおける対角値として定義する．これは，通常の協力ゲームにおける Shapley 値の拡張とみなすことができる．多重線形展開で表される多選択肢ファジィゲームのクラスにおける対角値の性質を明らかにする．

2. 通常の協力ゲームとその解

通常の協力ゲームは，プレイヤーが参加する（協力する）または参加しない（協力しない）かのいずれかの選択をするという前提に基づいており，プレイヤーの集合を $N = \{1,2,\ldots,n\}$ とするとき，$v(\emptyset)=0$ を満たす $v:2^N \to \mathbb{R}$ で定義される．このとき，関数

値 $v(S)$ は，$S \in 2^N$ が得られる最大利益または最小費用を表す．通常の協力ゲームすべてからなる集合を $\mathcal{G}$ と表す．N 上の全単射は，N の順列であるとみなされ，その集合は $\Pi(N)$ と表される．順列 $\pi \in \Pi(N)$ と $S \subseteq N$ に対して，$\pi(S) = \{\pi(i) \mid i \in S\}$ とする．このとき，ゲーム $\pi v \in \mathcal{G}$ を任意の $S \subseteq N$ に対して $\pi v(\pi(S)) = v(S)$ で定義する．

$\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ に対して，関数 $g^C : \mathcal{G}' \to \mathbb{R}^n$ は，$\mathcal{G}'$ 上の協力ゲームの解と考えられる．協力ゲームの主要な解には，Shapley 値，Banzhaf 値，正規化 Banzhaf 値がある．Shapley 値は，次のように定義される．

定義 1 [10] $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ に対して，関数 $\phi : \mathcal{G}' \to \mathbb{R}^N$ は，任意の $v \in \mathcal{G}'$ と $i \in N$ に対して次が成り立つとき $\mathcal{G}'$ 上の Shapley 値，あるいは単に Shapley 値と呼ばれる．

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

関数 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は，$h(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{S \subseteq N} C_S \prod_{j \in S} p_j$ を満たす C_S $(S \subseteq N)$ が存在するとき，多重線形関数と呼ばれる．$\alpha^S = (\alpha_1^S, \ldots, \alpha_n^S) \in \{0,1\}^n$ を任意の $i \in S$ に対して $\alpha_i^S = 1$ で，それ以外の場合には $\alpha_i^S = 0$ で定義すると，次の定理が成り立つ．

定理 1 [8] 任意の $T \subseteq N$ に対して $h(\alpha^T) = v(T)$ を満たす多重線形関数は一意に存在して，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} h^v(p_1, \ldots, p_n) &= \sum_{S \subseteq N} \left[\prod_{j \in S} p_j \prod_{j \notin S} (1 - p_j) \right] v(S) \\ &= \sum_{S \subseteq N} \prod_{j \in S} p_j \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v(S). \end{aligned} \tag{1}$$

関数 (1) は，v の多重線形展開 (the multilinear extension; MLE) と呼ばれる．$D_i h^v(p_1, \ldots, p_n)$ を p_i に関する h の偏導関数とすると，次が得られる．

$$D_i h^v(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \prod_{j \in S, j \neq i} p_j \prod_{j \notin S} p_j [v(S) - v(S \setminus \{i\})].$$

このとき，次の定理が成り立つ．

定理 2 [9] 任意の $v \in \mathcal{G}$ に対して，次が成り立つ．

$$\phi_i(v) = \int_0^1 D_i h^v(t, \ldots, t) dt.$$

投票分析を扱う投票ゲームのクラスでは，Straffin[11] が定理 2 について，次のような解釈を与えている．すべての投票者が同質で，賛成，反対について同じ傾向をもつとき，すなわち任意の $i \in N$ に対して $p_i = p$ が成り立つとき，p が $[0,1]$ の範囲で一様分布しているならば投票者の影響力は Shapley 値に一致する．

3. 協力ファジィゲーム

協力の参加度合いを考慮するため，次で定義される協力ファジィゲームが提案された．$f(0,\ldots,0)=0$ を満たす $f:[0,1]^N \to \mathbb{R}$ は，（通常の）協力ファジィゲームと呼ばれ，$[0,1]^N$ の要素は，（通常の）ファジィ提携と呼ばれる [1, 2, 3, 7, 12, 13, 14, 15]．協力ファジィゲーム全体を $\mathcal{FG}$ と表す．$\mathcal{FG}' \subseteq \mathcal{FG}$ に対して，関数 $g^F:\mathcal{FG}' \to \mathbb{R}^n$ は $\mathcal{FG}'$ 上の解と考えられる．

Branzei ら [7] は，ファジィゲーム上の解として次を定義した．

定義 2 [7] 関数 $\delta:\mathcal{FG}_1 \to \mathbb{R}^n$ は，任意の $v \in \mathcal{G}'$ と $i \in N$ に対して次が成り立つとき，対角値 (Diagonal value) と呼ばれる．

$$\delta_i(f) = \int_0^1 D_i f(t,\ldots,t)dt, \forall f \in \mathcal{FG}_1,$$

ここで，$\mathcal{FG}_1$ は関数 f が C^1 級となるファジィゲーム全体を表し，$D_i f(s_1,\ldots,s_n) = \partial f/\partial s_i(s_1,\ldots,s_n)$ とする．

ここで，次の注意を与える．

注意 1 ファジィゲーム $f \in \mathcal{FG}$ において，$\partial f/\partial s_i$ が得られるとき，これを提携参加度を考慮したプレイヤー i の限界貢献度（ファジィ型貢献度）とみなすことができる．したがって，対角値は，プレイヤー間に提携の参加度に関する同質性が成り立つとき，提携参加度を考慮したプレイヤー i の限界貢献度（ファジィ型貢献度）とみなすことができる．

多重線形展開 h^v の定義域を $[0,1]^n$ に制限すると，ファジィゲームが得られる．このようなファジィゲーム全体を $\mathcal{FG}_{MLE}$ と表す．$h^v \in \mathcal{FG}_{MLE}$ に対する対角値は v の Shapley 値と一致する．

4. 多選択肢ゲーム

プレイヤーが複数の選択肢の中から一つを選択するような状況は数多く存在する．このような状況を取り扱うため，Bolger [5] は，多選択肢ゲーム (multialternative games, games with r alternatives) を定義した．プレイヤーが選択できる選択肢の集合を $R=\{1,2,\ldots,r\}$ としたとき，プレイヤーがどの選択肢を選んでいるかを表すものとして，次のアレンジメントが提案された．

定義 3 [5, 6] 次を満たす $Y=(Y_k)_{k\in R}$ を N に対する多選択肢間のアレンジメント，あるいは単にアレンジメントとよぶ．

1. $\cup_{k\in R} Y_k = N$,
2. $Y_k \cap Y_l = \emptyset, \forall k \neq l$

アレンジメント全体を R^N と表す．

アレンジメントは，各プレイヤーが選択肢を一つ選択している状況を表している．

定義 4 [5, 6] 次式を満たす関数 $m' : R^N \to \mathbb{R}^r$ を多選択肢ゲームという.

$$m'(Y) = (m'_1(Y), \ldots, m'_r(Y))$$
$$m'_k(Y) = 0 \quad \forall k \in R, Y_k = \emptyset$$

$m'_k(Y)$ は，各プレイヤーが部分アレンジメント Y に従って選択肢を選ぶときの提携 Y_k の提携値を表す.

$r=1$ のときの多選択肢ゲーム m' は，通常の協力ゲームとは一致しない. $r=2$ のときの多選択肢ゲームにおいて，選択肢 1 を選択することを協力する，選択肢 2 を選択することを協力しないとみなすと，値域の第一成分 m'_1 のみに着目すれば，通常の協力ゲームと一致する.

多選択肢ゲームにおいては，Bolger [5, 6] によっていくつかの解が提案されている．また，多選択肢ゲームに対する Deegan-Packel 指数 [?] も提案されている.

5. 拡張多選択肢ゲーム

多選択肢ゲームでは，各プレイヤーは 1 つの選択肢を必ず選択するものという前提に基づいている．これに対し，いずれの選択肢も選択していないプレイヤーがいる状況を考えると次のようなプレイヤー集合の族が考えられる.

定義 5 [16] 次を満たす $Y = (Y_k)_{k \in R}$ を N に対する多選択肢間の部分アレンジメント，あるいは単に部分アレンジメントとよぶ.

1. $Y_k \subseteq N, \forall k \in R$
2. $Y_k \cap Y_l = \emptyset, \forall k \neq l$

部分アレンジメント全体の集合を $(R \cup \{0\})^N$ と表す.

$Y_0 = N \setminus \cup_{l \in R} Y_l$, $R_0^N = (R \cup \{0\})^N \setminus \{(\emptyset, \ldots, \emptyset)\}$ とする．また，部分アレンジメント $S \in (R \cup \{0\})^N$ とその $l \in R$ 番目の要素の組 (S_l, S) を埋め込み提携と呼び，その全体を $\mathcal{EC}$ と表す.

$k \in R$ と $S \subseteq N$ に対して，$S^k = (S_l^k)_{l \in R} \in (R \cup \{0\})^N$ を次で定義する.

$$S_l^k = \begin{cases} S & \text{if } k = l \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

部分アレンジメントに基づき，拡張多選択肢ゲームを次のように定義する.

定義 6 [16] 次式を満たす関数 $m : (R \cup \{0\})^N \to \mathbb{R}^r$ を拡張多選択肢ゲームという.

$$m(Y) = (m_1(Y), \ldots, m_r(Y))$$
$$m_k(\emptyset, \ldots, \emptyset) = 0 \quad \forall k \in R$$

$m_k(Y)$ は，各プレイヤーが部分アレンジメント Y に従って選択肢を選択するときの提携 Y_k の提携値を表す. $r=1$ のとき，拡張多選択肢ゲームは通常の協力ゲームと一致しており，協力ゲームの自然な拡張であると考えられる.

拡張多選択肢ゲーム全体を $\mathcal{EMG}$ と表す. $\mathcal{EMG}' \subseteq \mathcal{EMG}$ に対して，関数 $f : \mathcal{EMG}' \to \mathbb{R}^{N \times R}$ を $\mathcal{EMG}'$ 上の解と呼ぶ．拡張多選択肢ゲームの解としては，Banzhaf 型貢献度期待値 [16] などが提案されている.

6. ファジィ拡張多選択肢ゲーム

プレイヤーは，各選択肢をいくらかの割合ずつ選択するような状況は数多く存在する．このような状況を取り扱うため，鶴見ら [16] は，ファジィ拡張多選択肢ゲーム（FGM ゲーム）を提案した．FGM ゲームは，次のように定義されるファジィ多選択肢アレンジメントに基づいて定義される．

定義 7 [16] 任意の $i \in N$ に対して $\sum_{k\in R} s_{i,k} \leq 1$ を満たす $((s_{i,l})_{l\in R})_{i\in N} \in ([0,1]^R)^N$ は，ファジィ多選択肢アレンジメントと呼ばれる．ファジィ多選択肢アレンジメント全体を MFA と表す．

$r = 1$ のとき，ファジィ多選択肢アレンジメントは通常のファジィ提携と一致する．

定義 8 [16] 関数 $mf : MFA \to \mathbb{R}^r$ は，次が成り立つときファジィ拡張多選択肢ゲーム（FGM ゲーム）と呼ばれる．

1. $mf(s) = (mf_1(s), \ldots, mf_r(s))$,
2. $mf_k(s) = 0, \forall k \in R$, if $\sum_{l\in R}\sum_{i\in N} s_{i,l} = 0$.

$r = 1$ のとき，FGM ゲームは通常の協力ファジィゲームと一致する．

FGM ゲーム全体を $\mathcal{FGM}_r$ または $\mathcal{FGM}$ と表す．任意の $k \in R$ に対し $mf_k \in \mathcal{FGM}_r$ が偏微分可能で，任意の $i \in N$ と $k \in R$ に対し $\partial mf_k/\partial s_{i,k}$ が積分可能である $mf \in \mathcal{FGM}_r$ の全体を $\mathcal{FGM}^1$ または $\mathcal{FGM}^1_r$ で表す．$\mathcal{FGM}' \subseteq \mathcal{FGM}_r$ に対して，関数 $g : \mathcal{FGM}' \to \mathbb{R}^{nr}$ は，$\mathcal{FGM}'$ 上の解とみなすことができる．

$mf \in \mathcal{FGM}^1$ と $(i,k) \in N \times R$ に対して $mf_{i,k} = \partial mf/\partial s_{i,k}$ と表す．このとき，$mf_{i,k}(s_1, \ldots, s_n)$ は，$(s_1, \ldots, s_n)$ においてプレイヤー i が選択しない度合いを減らして選択肢 k を選択する度合いを増やしたときの利益の変化率を表している．そこで，$mf_{i,k}$ をプレイヤー i の選択肢 k に対するファジィ型限界貢献度と呼ぶ．

[16] では，すべてのプレイヤーが各選択肢を選択する度合いを独立かつ一様に選択するときのファジィ型限界貢献度を Banzhaf 型貢献度期待値と呼び，解として定義している．

拡張多選択肢ゲームの多重線形拡張を定義するため，次の多重線形関数を導入する．関数 $f : \mathbb{R}^{nr} \to \mathbb{R}$ は，$f(((p_{i,l})_{l\in R})_{i\in N}) = \sum_{S\in B_0} C_S \prod_{l\in R}\prod_{i\in S_l} p_{i,l}$ を満たす C_S $(S = (S_l)_{l\in R} \in B_0)$ が存在するとき多重線形関数と呼ぶ．

$i \in N, k \in R, S = (S_l)_{l\in R} \in B_0$ に対して $((p^S_{i,k})_{k\in R})_{i\in N} \in (\{0,1\}^R)^N$ を次で定義する．

$$p^S_{i,k} = \begin{cases} 1, & i \in S_k, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき次が得られる．

定理 3 [16] $m \in \mathcal{GMG}$ と $k \in R$ に対して，任意の $S = (S_l)_{l\in R} \in B_0$ に対して $f^m_k((p^S_{1,p})_{p\in R}, \ldots, (p^S_{n,p})_{p\in R}) = m_k(S)$ を満たす多重線形関数 $f^m_k : \mathbb{R}^{nr} \to \mathbb{R}$ は，一意

に存在して，次で与えられる．

$$\begin{aligned} & f_k^m((p_{1,l})_{l\in R},\ldots,(p_{n,l})_{l\in R}) \\ & = \sum_{S\in B_0}\prod_{j\in S_1}p_{j,1}\cdots\prod_{j\in S_r}p_{j,r}\prod_{j\in S_0}\left(1-\sum_{l=1}^{r}p_{j,l}\right)m_k(S), \end{aligned} \tag{2}$$

ただし $S_0 = N\backslash\bigcup_{l=1}^{r}S_l$ である．

関数 (2) を選択肢 $k\in R$ に関する $m\in\mathcal{GMG}$ の多重線形展開と呼ぶ．$r=1$ のとき，通常の協力ゲームに対する多重線形展開と一致する．

与えられた $m\in\mathcal{GMG}$ に対して，FGM ゲーム $f^m : MFA\to\mathbb{R}^R$ を任意の $k\in R$ と $s\in MFA$ に対して $(f^m)_k(s)=f_k^m(s)$ で定義する．拡張多選択肢ゲームとその多重線形展開で表される FGM ゲームは一対一に対応する．多重線形展開で表される FGM ゲーム全体を $\mathcal{FGM}_{MLE}$ と表す．$\mathcal{FGM}_{MLE}\subseteq\mathcal{FGM}_1$ が成り立つことに注意しておく．多重線形展開で表される FGM ゲームの Banzhaf 型貢献度期待値は拡張 Banzhaf 値と一致する [16].

7. 拡張多選択肢ゲームにおける対角値

通常の協力ファジィゲームにおける対角値の定義に基づき，FGM ゲームに対する対角値を解として定義する．プレイヤー間に各選択肢を選択する度合いに同質性がある状況で，すなわち $s_{i,k}=s_k$ が成り立つ状況で，各選択肢を選択する度合いが一様に分布していると考えたとき，プレイヤー $i\in N$ の選択肢 $k\in R$ に対するファジィ型限界貢献度の期待値を対角値とする．すなわち，対角値は次のように定義できる．

定義 9 $\mathcal{FGM}'\subseteq\mathcal{FGM}$ とする．関数 $\phi:\mathcal{FGM}'\to\mathbb{R}^{nr}$ は，次が成り立つとき $\mathcal{FGM}'$ 上の対角値と呼ぶ．

$$\delta_{i,k}(mf) = \int_0^1\frac{\partial mf_k}{\partial s_{i,k}}(t,\ldots,t)dt, \qquad \forall(i,k)\in N\times R, \forall mf\in\mathcal{FGM}'.$$

$\mathcal{FGM}_{MLE}$ 上での対角値の別表現を得ることができる．

定理 4 $\mathcal{FGM}_{MLE}$ 上の対角値 δ は，次で表される．

$$\delta_{i,k}(mf) = \sum_{S\in B_0;S_0\ni i}\frac{s_1!\cdots s_r!(n-\sum_{l=1}^{r}s_l-1)!}{n!}\{m_k(S\cup\{i\}^k)-m_k(S)\}$$
$$\forall(i,k)\in N\times R, \forall mf\in\mathcal{FGM}_{MLE}$$

ただし，$m\in\mathcal{GMG}$ は，$mf\in\mathcal{FGM}_{MLE}$ に対応する拡張多選択肢ゲームである．

注意 2 $r=1$ のとき，対角値は，通常のファジィゲームの対角値と一致する．

注意 3 $r=1$ のときの $\mathcal{FGM}_{MLE}$ 上の対角値は，通常の協力ゲームの Shapley 値と一致する．したがって，対角値は Shapley 値の一つの拡張とみなすことができる．

ここで，FGM ゲームの解 $g:\mathcal{FGM}'\to\mathbb{R}^{nr}$ に関する自然な性質をいくつか導入する．

性質 1 任意の $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ と $mf_1, mf_2, \alpha_1 mf_1 + \alpha_2 mf_2 \in \mathcal{FGM}'$ に対して $g(\alpha_1 mf_1 + \alpha_2 mf_2) = \alpha_1 g(mf_1) + \alpha_2 g(mf_2)$ が成り立つ．

通常の協力ゲームの場合と同様に，$\pi \in \Pi(N), s \in MFA$, $k \in R$ and $i \in N$ に対して，$\pi(s)_{i,k} = s_{\pi(i),k}$ とする．また，$\pi \in \Pi(N)$, $mf \in \mathcal{FGM}$ and $k \in R$ に対して $\pi mf \in \mathcal{FGM}$ を $\pi mf(\pi(s)) = mf(s)$ for $s \in MFA$ で定義する．

性質 2 任意の $i \in N, \pi \in \Pi(N)$, $k \in R, mf \in \mathcal{FGM}'$ に対して，$g_{\pi(i),k}(\pi mf) = g_{i,k}(mf)$ が成り立つ．

$s \in MFA$, $(i,k) \in N \times R$, $t \leq 1 - \sum_{l \in R; l \neq k} s_{i,l}$ が与えられたとき，$(s_{-(i,k)}, t) \in MFA$ を，$(s_{-(i,k)}, t)_{i,k} = t$ で，$(j,l) \neq (i,k)$ を満たす任意の $(j,l) \in N \times R$ に対して $(s_{-(i,k)}, t)_{j,l} = s_{j,l}$ と定義する．任意の $0 \leq t \leq 1 - \sum_{l \neq k} s_{i,l}$ と $s \in MFA$ に対して $mf(s_{-(i,k)}, t) = 0$ ならば，プレイヤー i を k-ナルプレイヤーと呼ぶ．

性質 3 プレイヤー i が $mf \in \mathcal{FGM}'$ において k-ナルプレイヤーならば，$g_{i,k}(mf) = 0$ が成り立つ．

$\mathcal{FGM}_{MLE}$ 上の対角値について，次の性質が得られる．

定理 5 $\mathcal{FGM}_{MLE}$ 上の対角値は，性質 1–3 を満たす．

8. おわりに

この論文では，ファジィ拡張多選択肢ゲーム (FGM ゲーム) を取り扱った．FGM ゲームに対して，対角値の定義を与えた．対角値は，FGM ゲームの解とみなすことができる．また，多重線形展開で表される FGM ゲームに対して，対角値の別表現を得て，いくつかの性質を明らかにした．多重線形展開で表される FGM ゲームに対する対角値は，$r = 1$ のとき，通常の協力ゲームの Shapley 値と一致することから，拡張多選択肢ゲームの解とみなすこともできる．

今後の課題としては，FGM ゲームの解としての公理化と拡張多選択肢ゲームの解としての公理化などが挙げられる．

謝辞

この研究の一部は，日本学術振興会科学研究費補助金若手 (B) No. 16710113 の助成を受けています．

参考文献

[1] J.-P. Aubin, Coeur et valeur des jeux flous à paiements latéraux, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 279-A (1974) 891-894.

[2] J.-P. Aubin, Coeur et équilibres des jeux flous sans paiements latéraux, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 279-A (1974) 963-966.

[3] J.-P. Aubin, Cooperative fuzzy games, Mathematics of Operations Research, vol.6, p.1–13, 1981.

[4] M. J. Albizuri, J. C. Santos and J. M. Zarzuelo, Solutions for cooperative games with r alternatives, Review of Economic Design, vol. 4, pp. 345-356 (1999)

[5] E. Bolger, A value for games with n players and r alternatives, International Journal of Game Theory, vol. 22, no. 1, pp. 319-334 (1993)

[6] E.M. Bolger, A consistent value for games with n players and r alternatives, International Journal of Game Theory, vol. 29, pp. 93-99 (2000)

[7] R. Branzei, D. Dimitorov, S. Tijs, Models in Cooperative Game Theory – Crisp, Fuzzy and Multi-Choice Games –, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.

[8] G. Owen, Multilinear extensions of games, Management Science, vol.18, pp.64–79, 1972.

[9] G. Owen, Multilinear extensions and the Banzhaf values, Naval Research Logistics Quarterly, vol.22, pp.741–750, 1975.

[10] L. S. Shapley, A Value for n-person games, Contributions to the Theory of Games, vol. 2, pp. 307-317 (1953)

[11] P.D. Straffin, Probability models for power indices, in Ordeshook, P. ed., Game Theory and Political Science, New York Univ. Press, pp. 477-510, 1978.

[12] T. Tanino, Cooperative fuzzy games as extensions of ordinary cooperative games, Proc. 7th Czech-Japan Sem. Data Anal. Dec. Making under Uncertainty, pp. 26–31, 2004.

[13] Masayo Tsurumi, Tetsuzo Tanino, Masahiro Inuiguchi, The core and the related solution concepts in cooperative fuzzy games, 日本ファジィ学会誌, vol.12, no.1, pp.193–202 (2000).

[14] M. Tsurumi, T. Tanino and M. Inuiguchi, A Shapley function of cooperative fuzzy games, European Journal of Operational Research, vol. 129, pp. 596-618 (2001)

[15] M. Tsurumi, T. Tanino, M. Inuiguchi, Axiomatic characterizations of the Shapley function in cooperative fuzzy games, Central European Journal of Operations Research, vol. 12, pp. 47-57, 2004.

[16] M. Tsurumi, M. Inuiguchi, T. Tanino, A solution for fuzzy generalized multialternative games, The 2006 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2006) Conference Proceedings, pp. 95–98 (2006)